

Isomorphisme de Duflo et la cohomologie tangentielle

M.Pevzner^{*†}, Ch.Torossian[‡]

Département de Mathématiques et Applications- UMR 8553 du CNRS

École Normale Supérieure de Paris

45 rue d'Ulm, F-75230 Paris, Cedex 05

E-mail : pevzner@ens.fr, charles.torossian@ens.fr

Résumé

In the present note we show that the Duflo isomorphism extends to an isomorphism of associative algebras of tangential cohomologies. This result confirms the B.Shoikhet's conjecture [14, 15].

2000 Mathematics Subject classification : 16S80, 53D17, 53D55, 22E30, 22E60.

Table des matières

1	Rappels et Notations	2
1.1	Algèbre des polychamps de vecteurs	2
1.2	Algèbre des opérateurs polydifférentiels	3
1.3	Théorème de formalité de M. Kontsevich	4
1.4	Quasi-isomorphisme tangentiel et la formule d'homotopie	9
2	Isomorphisme de Duflo en cohomologie	12
2.1	Quantification du crochet de Kirillov-Kostant-Poisson	12

^{*}This research has been supported by a Marie Curie Fellowship of the European Community programme "Improving the Human Research Potential and the Social-Economic Knowledge Base" under contract number HPMF-CT-2002-01832.

[†]Nouvelle adresse : UMR 6056 du CNRS, Université de Reims, Moulin de la Housse, B.P. 1039 F-51687 Reims.

[‡]UMR 8553 du CNRS.

2.2	Complexes de Chevalley-Eilenberg et de Hochschild . .	13
2.3	Les graphes intervenant dans $d\mathcal{U}^0$	16
2.4	Factorisation des contributions des escargots	18
2.5	Calcul du poids d'un escargot	21
2.6	Conclusion	23

Introduction

Soit X une variété de Poisson quelconque. Le théorème de formalité de M. Kontsevich [8] Th.6.4 montre l'existence d'un L_∞ -quasi-isomorphisme entre deux algèbres de Lie différentielles graduées naturellement associées à la variété X . Plus précisément, ces deux algèbres \mathfrak{g}_1 et \mathfrak{g}_2 sont respectivement, celle des polychamps de vecteurs sur X munie de la différentielle nulle et du crochet de Schouten-Nijenhuis et celle des opérateurs polydifférentiels munie de la différentielle de Hochschild et du crochet de Gerstenhaber.

Lorsque la variété X est le dual d'une algèbre de Lie réelle de dimension finie \mathfrak{g} il existe sur X une structure de Poisson canonique induite par le crochet de Kirillov-Kostant. Dans ce cas particulier la structure de Poisson est linéaire (les coefficients du bivecteur correspondant sont des fonctions linéaires). Le théorème de la formalité implique alors l'existence d'un isomorphisme d'algèbres entre l'ensemble $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ des polynômes \mathfrak{g} -invariants sur \mathfrak{g}^* et le centre $Z(\mathfrak{g})$ de l'algèbre enveloppante de \mathfrak{g} .

Cet isomorphisme est donné par la différentielle du L_∞ -quasi-isomorphisme de Kontsevich restreinte aux 0-cohomologies tangentes des algèbres \mathfrak{g}_1 et \mathfrak{g}_2 associées à $X = \mathfrak{g}^*$.

De plus cet isomorphisme coïncide avec l'isomorphisme de Duflo [8].

Dans la présente note nous montrons que cet isomorphisme se prolonge en cohomologie tangentielle de plus haut degré. Ce résultat confirme une conjecture de B.Shoikhet [14, 15].

1 Rappels et Notations

1.1 Algèbre des polychamps de vecteurs

Soit X une variété de classe C^∞ . On lui associe deux algèbres de Lie différentielles graduées. La première algèbre de Lie différentielle

graduée $\mathfrak{g}_1 = T_{\text{poly}}(X)$ est l'algèbre graduée des polychamps de vecteurs sur X :

$$T_{\text{poly}}^n(X) := \Gamma(X, \Lambda^{n+1}TX), \quad n \geq -1$$

munie du crochet de Schouten-Nijenhuis $[\cdot, \cdot]_{SN}$ et de la différentielle $d := 0$.

Rappelons tout d'abord que le crochet de Schouten-Nijenhuis est donné pour tous $k, l \geq 0$, $\xi_i, \eta_j \in \Gamma(X, TX)$ par ([9]) :

$$[\xi_0 \wedge \cdots \wedge \xi_k, \eta_0 \wedge \cdots \wedge \eta_l]_{SN} = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l (-1)^{i+j} [\xi_i, \eta_j] \wedge \xi_0 \wedge \cdots \wedge \xi_{i-1} \wedge \xi_{i+1} \wedge \cdots \wedge \xi_k \wedge \eta_0 \wedge \cdots \wedge \eta_{j-1} \wedge \eta_{j+1} \wedge \cdots \wedge \eta_l$$

Et pour $k \geq 0$ et $h \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, $\xi_i \in \Gamma(X, TX)$:

$$[\xi_0 \wedge \cdots \wedge \xi_k, h]_{SN} = \sum_{i=0}^k (-1)^i \xi_i(h) \cdot (\xi_0 \wedge \cdots \wedge \xi_{i-1} \wedge \xi_{i+1} \wedge \cdots \wedge \xi_k).$$

Le symbole $[\xi_i, \eta_j]$ désigne le crochet standard des champs des vecteurs, *i.e.* la dérivée de Lie $L_{\xi_i}(\eta_j)$.

Précisons ici que nous adoptons la convention de [11] l'identification des poly-champs de vecteurs avec les tenseurs anti-symétriques. Les produits $\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k$ s'identifient avec

$$\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) \xi_{\sigma_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{\sigma_k}.$$

Cette convention est différente de celle de [8] §6.3 mais sera compensée par une autre convention dans la définition des poids.

Nous renvoyons le lecteur vers [8] §4.6.1 et [2] IV.2 pour une autre interprétation du crochet de Schouten-Nijenhuis en termes des variables impaires.

1.2 Algèbre des opérateurs polydifférentiels

La deuxième algèbre de Lie différentielle graduée associée à X est celle des opérateurs polydifférentiels $\mathfrak{g}_2 = D_{\text{poly}}(X)$ vue comme une sous-algèbre du complexe de Hochschild décalé de l'algèbre des fonctions sur X .

On définit sur $D_{\text{poly}}(X)$ une graduation donnée par $|A| = m - 1$ où $A \in D_{\text{poly}}(X)$ est un opérateur m -différentiel.

La composition de deux opérateurs $A_1 \in D_{\text{poly}}^{m_1}(X)$ et $A_2 \in D_{\text{poly}}^{m_2}(X)$ s'écrit pour $f_i \in \mathcal{O}_X$:

$$(A_1 \circ A_2)(f_1, \dots, f_{m_1+m_2-1}) = \sum_{j=1}^{m_1} (-1)^{(m_2-1)(j-1)} A_1(f_1, \dots, f_{j-1}, A_2(f_j, \dots, f_{j+m_2-1}), f_{j+m_2}, \dots, f_{m_1+m_2-1}).$$

Cette opération de composition permet de définir le crochet de Gerstenhaber comme suit :

$$[A_1, A_2]_G := A_1 \circ A_2 - (-1)^{|A_1||A_2|} A_2 \circ A_1.$$

La différentielle dans $D_{\text{poly}}(X)$ s'écrit alors

$$dA = -[\mu, A]_G,$$

où μ est l'opérateur bi-différentiel de multiplication des fonctions :

$$\mu(f_1, f_2) = f_1 f_2.$$

Notons que cette différentielle est liée à celle de Hochschild d_H par la relation

$$d_H(A) = (-1)^{|A|+1} dA.$$

Ce choix de signe fait de $(D_{\text{poly}}(X), d, [\ , \]_G)$ une algèbre de Lie différentielle graduée.

1.3 Théorème de formalité de M. Kontsevich

L'application $\mathcal{U}_1^{(0)} : T_{\text{poly}} \mapsto D_{\text{poly}}$ donnée par

$$\mathcal{U}_1^{(0)} : (\xi_0, \dots, \xi_n) \mapsto \left(f_0 \otimes \dots \otimes f_n \rightarrow \sum_{\sigma \in S_{n+1}} \frac{\text{sgn}(\sigma)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n \xi_{\sigma(i)}(f_i) \right) \quad (1.1)$$

pour $n \geq 0$ et par $f \mapsto (1 \rightarrow f)$ pour $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est un quasi-isomorphisme des complexes. C'est une version du théorème de Kostant-Hochschild-Rosenberg ([8] §4.6.1.1).

Rappelons brièvement la construction du L_∞ -quasi-isomorphisme de Kontsevich en suivant la présentation de [8, 2, 11].

Considérons les algèbres décalées $\mathfrak{g}_1[1]$ et $\mathfrak{g}_2[1]$ comme des variétés formelles graduées, pointées (cf [8], [2] III.2). Chacune des cogèbres sans co-unité

$$S^+(\mathfrak{g}_i[1]) = \bigoplus_{n \geq 0} S^n(\mathfrak{g}_i[1]), \quad i = 1, 2$$

possède une codérivation Q^i de degré 1 définie par la structure d'algèbre de Lie différentielle graduée¹ de \mathfrak{g}_i et telle que $[Q^i, Q^i] = 0$. Le théorème de la formalité peut être énoncé alors de la façon suivante.

Théorème 1.1. *Il existe un L_∞ -quasi-isomorphisme entre les variétés formelles graduées pointées $\mathfrak{g}_1[1]$ et $\mathfrak{g}_2[1]$, i.e. un morphisme de cogèbres*

$$\mathcal{U} : S^+(\mathfrak{g}_1[1]) \rightarrow S^+(\mathfrak{g}_2[1])$$

tel que

$$\mathcal{U} \circ Q^1 = Q^2 \circ \mathcal{U}$$

et tel que la restriction de \mathcal{U} à $\mathfrak{g}_1[1] \simeq S^1(\mathfrak{g}_1[1])$ est le quasi-isomorphisme de complexe de cochaînes $\mathcal{U}_1^{(0)}$ donné par (1.1).

Cette construction est basée sur la réalisation explicite du L_∞ -quasi-isomorphisme \mathcal{U} dans le cas plat, dont nous allons à présent rappeler la construction. Nous suivons la présentation de [8] chapitres 5 et 6.

Plaçons nous dans le cas où la variété X est l'espace vectoriel \mathbb{R}^d . D'après la propriété universelle des cogèbres, cocommutatives le L_∞ -quasi-isomorphisme \mathcal{U} est entièrement déterminé par ses "coefficients de Taylor"

$$\mathcal{U}_k : S^k(\mathfrak{g}_1[1]) \rightarrow \mathfrak{g}_2[1],$$

avec $k \geq 1$ obtenus en composant \mathcal{U} avec la projection canonique $\pi : S^+(\mathfrak{g}_2) \rightarrow \mathfrak{g}_2$. On notera $\overline{\mathcal{U}}$ cette composition.

¹D'après [2] on doit remplacer le crochet de Schouten par l'opposé du crochet pris dans l'ordre inverse. Ce crochet coïncide avec le crochet de Schouten modulo un signe moins lorsque deux éléments impairs sont en jeu. Remarquons qu'alors le coefficient de Taylor Q_2^1 défini sur $S(\mathfrak{g}_1[1])$ vaut alors pour $\gamma_1 = \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_{k_1}$ et $\gamma_2 = \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_{k_2}$:

$$Q_2^1(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = \sum_{\substack{1 \leq r \leq k_1 \\ 1 \leq s \leq k_2}} (-1)^{r+s+k_1-1} [\xi_r, \eta_s] \wedge \xi_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\xi_r} \wedge \dots \wedge \xi_{k_1} \wedge \eta_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\eta_s} \wedge \dots \wedge \eta_{k_2},$$

ce qui est conforme à la formule de [8] §4.6.1.

Ces coefficients de Taylor \mathcal{U}_n sont définis à l'aide des graphes de Kontsevich et de leurs poids dont nous rappelons brièvement la construction afin de rendre le texte plus autonome et de fixer quelques conventions.

Soit $G_{n,m}$ l'ensemble de graphes étiquetés, orientés ayant n sommets du premier type (sommets aériens) et m sommets du deuxième type (sommets terrestres) tels que :

1. Toutes les arêtes partent des sommets du premier type.
2. Le but d'une arête est différent de sa source (pas de boucles).
3. Il n'y a pas d'arêtes multiples (même source, même but).

On dira qu'un tel graphe est admissible. Par étiquetage d'un graphe admissible Γ on entend un ordre total sur l'ensemble E_Γ des arêtes de Γ compatible avec l'ordre de l'ensemble des sommets.

Soit $\Gamma \in G_{n,m}$ un graphe admissible étiqueté, on note s_k le nombre d'arêtes partant du sommet du premier type ayant le numéro k . A tout n -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de polychamps de vecteurs sur X tels que pour tout $k = 1, \dots, n$ l'élément α_k soit un s_k -champ de vecteurs, on associe, suivant [8] §6.3 un opérateur m -différentiel

$$B_\Gamma(\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_n),$$

construit de la façon suivante : on désigne par $\{e_k^1, \dots, e_k^{s_k}\}$ le sous-ensemble ordonné de E_Γ des arêtes partant du sommet aérien k . A toute application $I : E_\Gamma \rightarrow \{1, \dots, d\}$ et à tout sommet x du graphe Γ (de type aérien ou terrestre) on associe l'opérateur différentiel à coefficient constant :

$$D_{I(x)} = \prod_{e=(-,x)} \partial_{I(e)},$$

où pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$ on désigne par ∂_i l'opérateur de dérivation partielle par rapport à la i -ème variable. Le produit est pris pour toutes les arêtes qui arrivent au sommet x .

On désigne par α_k^I le coefficient (suivant la convention sur le produit extérieur) :

$$\begin{aligned} \alpha_k^I &= \alpha_k^{I(e_k^1) \dots I(e_k^{s_k})} &= \langle \alpha_k, dx_{I(e_k^1)} \wedge \dots \wedge dx_{I(e_k^{s_k})} \rangle \\ & &= \langle \alpha_k, dx_{I(e_k^1)} \otimes \dots \otimes dx_{I(e_k^{s_k})} \rangle. \end{aligned}$$

On pose alors :

$$B_\Gamma(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n)(f_1 \otimes \cdots \otimes f_m) = \sum_{I: E_\Gamma \rightarrow \{1, \dots, d\}} \prod_{k=1}^n D_{I(k)} \alpha_k^I \prod_{l=1}^m D_{I(\bar{l})} f_l.$$

Le coefficient de Taylor \mathcal{U}_n est donné par la formule :

$$\mathcal{U}_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{\Gamma \in G_{n,m}} w_\Gamma B_\Gamma(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n), \quad (1.2)$$

où la somme porte sur les graphes admissibles Γ pour lesquels l'opérateur $B_\Gamma(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n)$ est bien défini et l'entier m est relié à n et aux α_j par la formule

$$m - 2 = \sum_{k=1}^n s_k - 2n. \quad (1.3)$$

Le coefficient w_Γ est un certain poids associé à chaque graphe Γ . Alors $\mathcal{U}_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est un opérateur m -différentiel.

Le poids w_Γ est nul sauf si le nombre d'arêtes $|E_\Gamma|$ du graphe Γ est précisément égal à $2n + m - 2$. Il s'obtient en intégrant une forme fermée Ω_Γ de degré $|E_\Gamma|$ sur une composante connexe de la compactification de Fulton-McPherson d'un espace de configurations qui est précisément de dimension $2n + m - 2$ (voir [6] et [8] §5). Ce poids dépend lui aussi d'un ordre sur l'ensemble des arêtes, mais le produit $w_\Gamma \cdot B_\Gamma$ n'en dépend plus.

Plus précisément on désigne par $\text{Conf}_{n,m}$ l'ensemble des

$$(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m)$$

où les p_j sont des points distincts appartenant au demi-plan de Poincaré :

$$\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C}, \text{Im } z > 0\},$$

et où les q_j sont des points distincts sur \mathbb{R} vu comme le bord de \mathbb{H}_+ .
Le groupe :

$$G = \{z \mapsto az + b \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R} \text{ et } a > 0\}$$

agit librement sur $\text{Conf}_{n,m}$. Le quotient :

$$C_{n,m} = \text{Conf}_{n,m}/G \quad (1.4)$$

est une variété de dimension $2n + m - 2$. Dans [8] §5, M. Kontsevich construit des compactifications $\overline{C}_{n,m}$ de ces variétés de configurations. Ce sont des variétés à coins de dimension $2n + m - 2$.

Pour tout graphe $\Gamma \in G_{n,m}$ on définit une fonction d'angle :

$$\Phi_\Gamma : \overline{C}_{n,m} \longrightarrow (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^{|E_\Gamma|} \quad (1.5)$$

de la façon suivante : on trace le graphe dans $\overline{\mathbb{H}}_+$ en reliant les sommets par des géodésiques pour la métrique hyperbolique, et à chaque arête $e = (p, q)$ on associe l'angle $\varphi_e = \text{Arg} \left(\frac{q-p}{q-\bar{p}} \right)$ que fait la demi-droite verticale issue de p avec l'arête e (voir figure [1]).

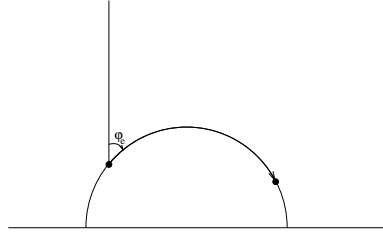


FIG. 1 – Fonction d'angle

En choisissant un ordre sur les arêtes ceci définit Φ_Γ sur $C_{n,m}$ et on vérifie que cette application se prolonge à la compactification. Soit Ω_Γ la forme différentielle $\Phi_\Gamma^*(dv)$ sur $\overline{C}_{n,m}$ où dv est la forme volume normalisée sur $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^{|E_\Gamma|}$. Soit $\overline{C}_{n,m}^+$ la composante connexe de $\overline{C}_{n,m}$ où les q_1, \dots, q_m sont rangés par ordre croissant. Les orientations naturelles du demi-plan \mathbb{H}_+ et de \mathbb{R} définissent une orientation de $\text{Conf}_{n,m}^+$, et par passage au quotient une orientation naturelle de $\overline{C}_{n,m}^+$, car l'action du groupe G préserve l'orientation. On définit alors le poids w_Γ par :

$$w_\Gamma = \int_{\overline{C}_{n,m}^+} \Omega_\Gamma. \quad (1.6)$$

Remarque : Ce poids est un peu différent du poids défini par M. Kontsevich dans [8] § 6.2 : nous ne multiplions pas l'intégrale par le facteur $(\prod_{k=1}^n \frac{1}{s_k!})$. Cette convention est compensée par celle sur les sur le produit extérieur.

Soit Γ un graphe admissible dans $G_{n,m}$. Le groupe $S_{s_1} \times \dots \times S_{s_n}$, produit des groupes de permutations des arêtes attachés à chaque sommet, agit naturellement sur Γ par permutation de l'étiquetage des

arêtes. Il est clair que l'on a :

$$\begin{aligned} B_{\sigma, \Gamma} &= \varepsilon(\sigma) B_{\Gamma} \\ w_{\sigma, \Gamma} &= \varepsilon(\sigma) w_{\Gamma}, \end{aligned}$$

de sorte que le produit $w_{\Gamma} \cdot B_{\Gamma}$ ne dépend pas de l'étiquetage.

1.4 Quasi-isomorphisme tangentiel et la formule d'homotopie

Soit $\gamma \in T_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)[1]$ un 2-champ de vecteurs tel que $\gamma[-1]$ vérifie l'équation de Maurer-Cartan dans $T_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)$. C'est donc un 2-champ de vecteurs de Poisson. Le L_{∞} -quasi-isomorphisme introduit par M. Kontsevich permet de construire, à partir de $\hbar\gamma$, un star-produit $\star_{\hbar\gamma}$ de la manière suivante :

$$\star_{\hbar\gamma} = \mu + \overline{\mathcal{U}}(\hbar\gamma) = \mu + \sum_{n \geq 1} \frac{\hbar^n}{n!} \mathcal{U}_n(\gamma, \dots, \gamma), \quad (1.7)$$

où \hbar est un paramètre formel. Nous allons étudier en détail les propriétés de la dérivée du L_{∞} -quasi-isomorphisme \mathcal{U} au point $\hbar\gamma$.

Pour cela nous suivons la présentation de [12].

Nous avons rappelé en (1.4) la définition des compactifications des espaces de configurations $\overline{C}_{n,m}$. Comme une variation de ces objets Mochizuki considère les espaces $X_{n,m}^{\ell}$ définis pour tout entier positif ℓ de façon suivante.

Soit ϕ l'isomorphisme naturel entre $C_{\ell+1,0}^{\mathbb{R}}$ espace de configurations réelles et l'intérieur du $(\ell - 1)$ -simplexe standard $\overset{\circ}{\Delta}^{\ell-1}$, donné par $\phi(x) = (p_0(x) = 0, \dots, p_{\ell}(x) = 1)$. On obtient ainsi l'application $\psi : \overset{\circ}{\Delta}^{\ell} \simeq \overset{\circ}{\Delta}^{\ell-1} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow C_{\ell+1,0}$ définie par $\psi(x, t) = (p_0(x) + it, \dots, p_{\ell}(x) + it)$.

Notons alors $\overset{\circ}{X}_{n,m}^{\ell} = C_{n,m}^+ \times_{C_{\ell+1,0}} \overset{\circ}{\Delta}^{\ell}$ et $X_{n,m}^{\ell}$ son adhérence dans $\overline{C}_{n,m}$. On obtient ainsi une variété à coin de dimension $2n + m - 2 - \ell$.

On généralise la notion d'un graphe admissible. On dira qu'un graphe admissible Γ est de type (n, m, e) si le cardinal de l'ensemble de ces points aériens $\sharp V_{\Gamma}^1 = n$, celui de l'ensemble des points terrestres $\sharp V_{\Gamma}^2 = m$ et le nombre d'arêtes est égal à e .

Un graphe Γ est dit ℓ -admissible ($\ell \in \mathbb{N}$) si Γ est admissible de type (n, m, e) et $V_\Gamma^1 = V_\Gamma^{1,1} \sqcup V_\Gamma^{1,2}$ tels que

- a. $V_\Gamma^{1,1} = \{1, \dots, \ell + 1\}$
- b. Pour tout couple $(i, j) \subset V_\Gamma^{1,1}$ il n'existe pas d'arête les reliant.

On notera $G_{n,m}^{\ell,k}$ l'ensemble des graphes ℓ -admissibles de type $(n, m, 2n + m - 2 - \ell - k)$. Si $e = 2n + m - 2 - \ell$ on notera $G_{n,m}^{\ell,0} = G_{n,m}^\ell$.

On définit alors les poids des graphes ℓ -admissibles par

$$w_\Gamma^\ell := \int_{X_{n,m}^\ell} \Omega_\Gamma,$$

où Ω_Γ est la forme différentielle définie par la fonction d'angle (1.5).

Dans [12] Mochizuki introduit des applications

$$\mathcal{U}_{n,m}^\ell := \sum_{\Gamma \in G_{n,m}^\ell} w_\Gamma^\ell \cdot B_\Gamma : \bigotimes^n (T_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)[1]) \rightarrow D_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)[1 + \ell] \quad (1.8)$$

et note

$$\mathcal{U}_n^\ell := \sum_m \mathcal{U}_{n,m}^\ell. \quad (1.9)$$

Considérons alors les applications

$$\mathcal{U}_{n,m}^{\ell,\gamma} : \bigotimes^{\ell+1} (T_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)[1]) \rightarrow D_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)[1 + \ell]$$

telles que :

$$\mathcal{U}_{n,m}^{\ell,\gamma}(\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_{\ell+1}) = \mathcal{U}_{n,m}^\ell(\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_{\ell+1} \otimes \gamma \otimes \dots \otimes \gamma).$$

L'application dérivée $d\overline{\mathcal{U}} : T_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)[1] \rightarrow D_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)[1][[\hbar]]$ au point $\hbar\gamma$ est alors définie par (cf. formule (1.2))

$$d\overline{\mathcal{U}}_{\hbar\gamma}(\delta) := \sum_{n>0} \frac{\hbar^{n-1}}{(n-1)!} \mathcal{U}_n(\delta \cdot \gamma^n). \quad (1.10)$$

Dans [12] sont définis les applications

$$d\mathcal{U}^{\ell,\gamma} : \bigotimes^{\ell+1} T_{\text{poly}}[1] \rightarrow D_{\text{poly}}[1 + \ell][[\hbar]]$$

par

$$d\mathcal{U}^{\ell,\gamma}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{\ell+1}) = \sum_{n,m} \frac{\hbar^{n-\ell-1}}{(n-\ell-1)!} \mathcal{U}_{n,m}^{\ell,\gamma}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{\ell+1}). \quad (1.11)$$

Notons que l'on a en particulier $d\overline{\mathcal{U}}_{\hbar\gamma} = d\mathcal{U}^{0,\gamma}$.

S'il n'y a pas de confusion possible on notera $d\mathcal{U}^\ell$ au lieu de $d\mathcal{U}^{\ell,\gamma}$. Ces applications permettent de montrer l'existence d'une structure A_∞ tangente [12].

L'opérateur de cobord du complexe des cochaînes tangentielles de la première algèbre de Lie différentielle graduée $T_{\text{poly}}(X)[1]$ est donné par $Q^{\hbar\gamma} = -[\hbar\gamma, -]_{SN}$ qui est une dérivation graduée pour le produit extérieur \wedge des poly-champs de vecteurs (graduation standard).

Ce produit extérieur induit donc un produit associatif et commutatif que l'on notera \cup sur l'espace de la cohomologie $H_{\hbar\gamma}$ du premier espace tangent.

Sur le deuxième espace tangent on introduit un produit associatif gradué donné par la formule suivante :

$$(A_1 \cup A_2)(f_1 \otimes \cdots \otimes f_{m_1+m_2}) = A_1(f_1 \otimes \cdots \otimes f_{m_1}) \star_{\hbar\gamma} A_2(f_{m_1+1} \otimes \cdots \otimes f_{m_2}) \quad (1.12)$$

pour tout opérateur m_1 -différentiel A_1 et tout opérateur m_2 -différentiel A_2 . Cette opération est compatible avec le cobord $[-, \star]_G$ du deuxième complexe des cochaînes tangentielles et elle induit donc un cup-produit sur l'espace de la cohomologie $H_{\overline{\mathcal{U}}(\hbar\gamma)}$ du deuxième espace tangent.

Le théorème suivant est démontré avec différents degrés de précision dans [8] §8 et [11] Théorème 1.2.²

²Nous profitons de l'occasion pour corriger dans [11] une erreur de signe dans la proposition 4.1 et le théorème 4.6 due à une confusion dans l'utilisation du lemme 4.2. Dans la proposition 4.1 et le théorème 4.6, α est un k_1 -champ de vecteurs, β est un k_2 -champ de vecteur et γ est le 2-tenseur de Poisson. Mais dans le lemme 4.2 l'entier k_2 se réfère à γ , donc est égal à 2. Le signe $(-1)^{(k_1-1)k_2}$ vaut donc 1. Le signe $(-1)^{k_1(k_2-1)}$ doit être remplacé par $(-1)^{k_1}$, car l'argument à la fin de la démonstration du lemme 4.2 est défaillant et doit être corrigé par le suivant : on échange les positions 1 associée à α et 2 associée à β ce qui fait apparaître un signe $(-1)^{k_1 k_2}$ dû au poids, puis on échange à nouveau les positions après contraction cette fois entre $[\beta, \gamma]$ et α , ce qui fait apparaître un signe $(-1)^{(k_2+1)k_1}$ et fournit le signe $(-1)^{k_1}$. Signalons aussi que dans l'expression du crochet de Schouten modifié après le lemme 4.2, le signe $(-1)^{k_1 k_2}$ doit être remplacé par $(-1)^{(k_1-1)(k_2-1)}$ ce qui entraîne une modification de signe dans la formule $Q_2^1(\gamma_1, \gamma_2)$ quelques lignes plus loin, on doit remplacer $(-1)^{k_2}$ par $(-1)^{k_1-1}$. Toutes ces modifications sont mineures et sans conséquences sur le reste de l'article.

Dans [12] on trouvera une preuve de l'existence d'une A_∞ structure tangente.

Théorème 1.2. *Soit $X = \mathbb{R}^d$ et \mathcal{U} le L_∞ -quasi-isomorphisme donné explicitement dans [8] §6.4.*

La dérivée $d\overline{\mathcal{U}}_{\hbar\gamma}$ induit un isomorphisme d'algèbres de l'espace de la cohomologie $H_{\hbar\gamma}$ de l'espace tangent $T_{\hbar\gamma}(\mathfrak{g}_1[1])$ sur l'espace de la cohomologie $H_{\overline{\mathcal{U}}(\hbar\gamma)}$ de l'espace tangent $T_{\overline{\mathcal{U}}(\hbar\gamma)}(\mathfrak{g}_2[1])$.

C'est-à-dire pour tout couple (α, β) de poly-champs de vecteurs tels que $[\alpha, \gamma]_{SN} = [\beta, \gamma]_{SN} = 0$ on a

$$d\mathcal{U}^0(\alpha \cup \beta) = d\mathcal{U}^0(\alpha) \cup d\mathcal{U}^0(\beta) + D, \quad (1.13)$$

où D est un cobord de Hochschild de l'algèbre $(C^\infty(X)[[\hbar]], \star_\gamma)$ donné par

$$D = -[\star_\gamma, d\mathcal{U}^1(\alpha, \beta)]_G.$$

De façon plus générale, l'élément d'homotopie D est donné par

$$D = -[\star_\gamma, d\mathcal{U}^1(\alpha, \beta)]_G + d\mathcal{U}^1(Q^{\hbar\gamma}(\alpha \otimes \beta)), \quad (1.14)$$

avec pour $\alpha \in T_{\text{poly}}^{|\alpha|}(X)$ et $\beta \in T_{\text{poly}}^{|\beta|}(X)$

$$Q^{\hbar\gamma}(\alpha \otimes \beta) = -[\hbar\gamma, \alpha]_{SN} \otimes \beta - (-1)^{|\alpha|+1} \alpha \otimes [\hbar\gamma, \beta]_{SN}.$$

2 Isomorphisme de Duflo en cohomologie

2.1 Quantification du crochet de Kirillov-Kostant-Poisson

Dans le cas où la variété X est le dual d'une algèbre de Lie de dimension finie \mathfrak{g} les coefficients du 2-champ de vecteurs de Kirillov-Kostant-Poisson γ sont des fonctions linéaires sur \mathfrak{g}^* . Si $\{e_1, \dots, e_d\}$ est une base de \mathfrak{g} et (e_1^*, \dots, e_d^*) sa base duale on notera

$$\gamma = \frac{1}{2} \sum_{i,j} [e_i, e_j] e_i^* \wedge e_j^*$$

le 2-champ de vecteurs de Poisson associé.

Ceci étant on peut considérablement simplifier l'expression des opérateurs poly-différentiels B_Γ qui vont intervenir dans la définition

du star-produit \star_γ (formule (1.7)). A cause de la linéarité des coefficients de γ seuls interviennent les graphes dont les sommets du premier type reçoivent au plus une arête (chaque sommet aérien est le but d'au plus une arête). On parlera alors de graphes admissibles linéaires. Leur structure est bien décrite et relativement simple (voir par exemple [3]).

Il est facile de voir alors que si f_1 et f_2 sont deux polynômes alors $f_1 \star_\gamma f_2$ est en fait une somme finie. En localisant en $\hbar = 1$ on obtient un produit associatif sur l'algèbre des polynômes sur \mathfrak{g}^* . Ce produit définit sur $S(\mathfrak{g})$ une structure d'algèbre isomorphe à l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$.

Dans [8] §8.4, Kontsevich note I_{alg} l'isomorphisme d'algèbres entre $(S(\mathfrak{g}), \star_\gamma)$ et $U(\mathfrak{g})$. Compte tenu d'un résultat de Shoikhet [16] le résultat 8.3.4 de [8] montre que l'identification entre $(S(\mathfrak{g}), \star_\gamma)$ et $U(\mathfrak{g})$ se fait à l'aide de l'isomorphisme (d'espaces vectoriels) de Duflo.

Rappelons ce qu'est la formule de Duflo. On considère la série formelle sur \mathfrak{g}^* définie au voisinage de 0 pour $x \in \mathfrak{g}$ par

$$q(x) = \det_{\mathfrak{g}} \left(\frac{\sinh(\frac{\text{ad}x}{2})}{\frac{\text{ad}x}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.15)$$

On note $\partial(q)$ l'opérateur différentiel (d'ordre infini) sur $S(\mathfrak{g})$ correspondant et on note β la symétrisation de $S(\mathfrak{g})$ dans $U(\mathfrak{g})$. L'isomorphisme (d'espaces vectoriels) de Duflo de $S(\mathfrak{g})$ dans $U(\mathfrak{g})$ s'écrit

$$\beta \circ \partial(q). \quad (2.16)$$

Le point remarquable est que cette application restreinte aux invariants est un isomorphisme d'algèbres. On verra que c'est encore le cas pour toute la cohomologie.

2.2 Complexes de Chevalley-Eilenberg et de Hochschild

En ne considérant que les objets polynomiaux on peut sans difficultés localiser en $\hbar = 1$.

Le théorème (1.2) rappelé ci-dessus se restreint alors au cadre polynomial. On dispose donc d'un isomorphisme (la différentielle $d\mathcal{U}^0$) entre l'espace de cohomologie de Poisson de $S(\mathfrak{g})$ (c'est à dire la cohomologie du complexe des poly-champs de vecteurs sur \mathfrak{g}^* à coefficients dans $S(\mathfrak{g})$ munie du cobord $[\gamma, -]_{SN}$) et la cohomologie de Hochschild

de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ munie du cup produit standard. On cherche à expliciter cet isomorphisme.

Afin de simplifier les calculs nous établissons une autre réalisation de ce dernier espace de cohomologie.

En général, étant donné une algèbre de Lie de dimension finie \mathfrak{g} et un \mathfrak{g} -module à gauche M on définit la cohomologie $H^*(\mathfrak{g}, M)$ de \mathfrak{g} à coefficients dans M comme le foncteur dérivé à droite du foncteur des invariants. Plus concrètement (cf [4, 5, 17]), les modules de cohomologie

$$H^*(\mathfrak{g}, M)$$

se calculent par la cohomologie du complexe des cochaînes de Chevalley-Eilenberg

$$\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V(\mathfrak{g}), M),$$

où $V(\mathfrak{g})$ désigne le complexe standard de Chevalley-Eilenberg. Rappelons que l'on a $V_p(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^p \mathfrak{g}$ avec différentielle

$$d : V_p(\mathfrak{g}) \rightarrow V_{p-1}(\mathfrak{g})$$

donnée par

$$\begin{aligned} d(u \otimes e_1 \wedge \cdots \wedge e_p) &= \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} u e_i \otimes e_1 \wedge \cdots \wedge e_{i-1} \wedge e_{i+1} \wedge \cdots \wedge e_p \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} u \otimes [e_i, e_j] \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_{i-1} \wedge e_{i+1} \wedge \cdots \wedge e_{j-1} \wedge e_{j+1} \wedge \cdots \wedge e_p. \end{aligned}$$

Le complexe des cochaînes de Chevalley-Eilenberg

$$\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V(\mathfrak{g}), M) = \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(U(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge \mathfrak{g}, M)$$

est isomorphe au complexe des cochaînes

$$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\bigwedge \mathfrak{g}, M) = \bigwedge \mathfrak{g}^* \otimes M \quad (2.17)$$

dont le cobord $\delta : \bigwedge^n \mathfrak{g}^* \otimes M \rightarrow \bigwedge^{n+1} \mathfrak{g}^* \otimes M$ est défini par

$$\begin{aligned} \delta f(e_1, \dots, e_{n+1}) &= \sum_i (-1)^{i+1} e_i f(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_{n+1}) + \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} f([e_i, e_j], \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_{n+1}). \end{aligned}$$

D'un autre côté, à toute algèbre A et à tout A -bimodule M on associe un module cosimplicial $[n] \mapsto \text{Hom}(A^{\otimes n}, M)$ en posant :

$$\partial^i(f)(a_0, \dots, a_n) = \begin{cases} a_0 f(a_1, \dots, a_n) & \text{si } i = 0 \\ f(a_0, \dots, a_{i-1} a_i, \dots, a_n) & \text{pour } 0 < i \leq n \\ f(a_0, \dots, a_{n-1}) a_n & \text{si } i = n + 1 \end{cases}$$

$$(\sigma^i f)(a_1, \dots, a_{n-1}) = f(a_1, \dots, a_i, 1, a_{i+1}, \dots, a_{n-1}).$$

La cohomologie de Hochschild $HH^*(A, M)$ de A à coefficients dans M ce sont les modules

$$HH^n(A, M) = H^n C(\text{Hom}(A^\otimes, M)),$$

où $C\text{Hom}(A^\otimes, M)$ est le complexe des cochaînes associé :

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\partial_0 - \partial_1} \text{Hom}(A, M) \xrightarrow{d} \text{Hom}(A \otimes A, M) \xrightarrow{d} \dots$$

dont le cobord d est donné par $d = \sum (-1)^i \partial^i$.

Dans le cas où on a $A = U(\mathfrak{g})$ et $M = U(\mathfrak{g})$ on obtient le résultat suivant (cf [10] Lemma 3.3.3) :

Lemme 2.1. *Les espaces de cohomologie $HH^*(U(\mathfrak{g}), U(\mathfrak{g}))$ et $H^*(\mathfrak{g}, U(\mathfrak{g}))$ sont isomorphes par l'anti-symétriseur.*

Cet isomorphisme est induit par le morphisme de complexes :

$$\Psi^* : \text{Hom}_{\mathbb{R}}(U(\mathfrak{g})^\otimes, U(\mathfrak{g})) \mapsto \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\bigwedge \mathfrak{g}, U(\mathfrak{g}))$$

défini pour $f \in \text{Hom}(U(\mathfrak{g})^\otimes, U(\mathfrak{g}))$ par

$$\begin{aligned} (\Psi^* f)(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) &= f(\Psi(e_1 \wedge \dots \wedge e_n)) \\ &:= f\left(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) e_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes e_{\sigma(n)}\right). \end{aligned}$$

On a alors

$$\Psi^*([\star, f]_G) = \delta(\Psi^*(f)).$$

Ainsi nous pouvons identifier le module de cohomologie de Hochschild tangentielle de l'algèbre de Lie différentielle graduée $\mathfrak{g}_2[1]$ avec celui du complexe (2.17). Cela veut dire que pour comprendre la différentielle du L_∞ -morphisme il faut faire agir les éléments de $H_{\overline{\mathcal{U}}(\gamma)}$ sur les fonctions linéaires et prendre l'anti-symétrisation.

En conclusion, étant donné le morphisme d'algèbres $d\mathcal{U}^0$ défini par (1.10) nous disposons d'un morphisme d'algèbres par composition :

$$H_{\text{Poisson}}^*(\mathfrak{g}, S(\mathfrak{g})) \xrightarrow{d\mathcal{U}^0} HH^*(U(\mathfrak{g}), U(\mathfrak{g})) \xrightarrow{\Psi^*} H^*(\mathfrak{g}, U(\mathfrak{g})).$$

Le reste de cette note est consacré à la formule explicite pour ce morphisme d'algèbres.

2.3 Les graphes intervenant dans $d\mathcal{U}^0$

Nous allons à présent calculer explicitement l'expression du morphisme $d\mathcal{U}^{0,\gamma} = d\mathcal{U}^0$ (formule (1.10)) dans le cas où la variété X est le dual d'une algèbre de Lie réelle de dimension finie munie du 2-champ de vecteurs de Kirillov-Kostant-Poisson γ .

Les graphes qui vont intervenir dans l'expression du morphisme $d\mathcal{U}^0$ sont 0-admissibles. Étant donnée l'identification du module de la cohomologie de Hochschild tangentielle avec la cohomologie du complexe des cochaînes de Chevalley-Eilenberg (Lemme 2.1), on doit évaluer $d\mathcal{U}^0(\alpha)$ avec $\alpha \in T_{\text{poly}}(\mathfrak{g}^*)[1]$ sur des fonctions linéaires.

Les graphes et les opérateurs qui vont intervenir sont comme sur les figures [2, 3] où l'on associe k fonctions linéaires de coordonnées e_{i_1}, \dots, e_{i_k} aux points terrestres, le k -champ de vecteur α au point de $V_{\Gamma}^{1,1} = \{1\}$ et le 2-champ de vecteurs γ aux n points aériens restants.

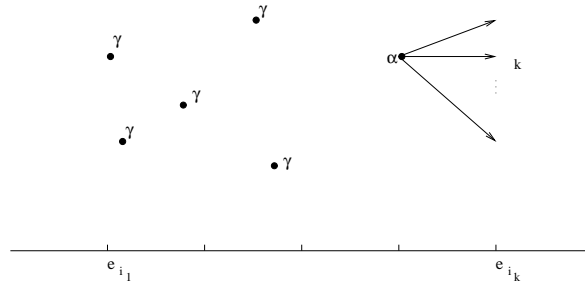


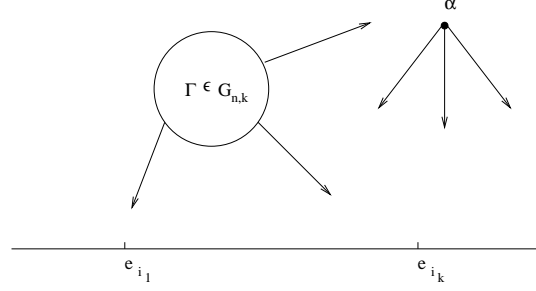
FIG. 2 – Les graphes de $d\mathcal{U}^0(\alpha)$

Pour que le poids correspondant ne s'annule pas, il faut qu'il y ait exactement $2n + k$ arêtes, ce qui correspond bien à la définition des graphes 0-admissibles.

En utilisant la linéarité des coefficients du 2-champ de vecteurs γ , nous allons déterminer la forme exacte de tels graphes.

Soit $\hat{\Gamma}$ un graphe contribuant a priori dans le calcul de $d\mathcal{U}^0(\alpha)$. Désignons par Γ le sous graphe dans lequel on a enlevé le sommet α et les k arêtes issues de ce sommet (figure [3]).

Le graphe Γ se décompose en réunion de graphes simples qui sont soit de type Lie (c'est à dire des arbres) soit de type roue tentaculaire.

FIG. 3 – Les graphes de $d\mathcal{U}^0(\alpha)$

Les arêtes qui partent du sommet de $V_\Gamma^{1,1}$ que l'on appellera sommet α vont donc soit sur les sommets terrestres soit sur les racines des sous-arbres indépendants du graphe Γ .

Étant donné que les fonctions e_{i_j} "dérivées" par le graphe Γ sont linéaires, le seul point de "connexion" des sous-arbres indépendants est donc le sommet α :

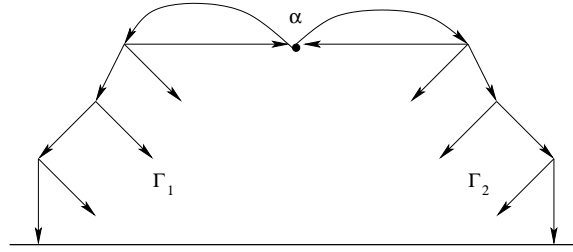


FIG. 4 – Point de connexion

Ceci montre que la forme $\Omega_{\hat{\Gamma}}$ se présente comme produit séparé de formes associées aux sous-graphes simples de Γ auxquels on a ajouté éventuellement une arête issue de α . On est donc amené à étudier les contributions dans les formes d'angles des graphes simples de Γ étendus éventuellement par une arête issue de α .

Premier cas : Soit Γ_1 un sous-graphe simple de Γ ne recevant pas de flèches provenant du sommet α . Supposons que ce graphe possède p sommets aériens et k sommets terrestres. Ce graphe possède $2p$ arêtes. La forme d'angle associée est intégrée sur une variété de configurations de dimension $2p + k$ on en déduit que $k = 0$. Alors au plus p flèches dérivent les sommets aériens (correspondant au 2-vecteur linéaire γ) et au moins p flèches issues des sommets aériens dérivent le poly-champ de vecteurs α . Or, les arêtes doubles et les boucles étant interdites,

de chacun de p sommets aériens part une et une seule arête vers le sommet α . Ainsi on se retrouve nécessairement avec un graphe de type roue pure comme à la figure [5]. La contribution dans le poids de ce sous-graphe se factorise d'une part et d'autre part est nulle d'après [16].

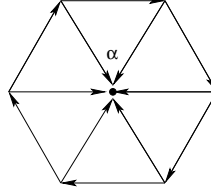


FIG. 5 – Une roue pure

Deuxième cas : Considérons Γ_1 un sous-graphe simple de racine numéroté 1 et recevant une arête $e = (\alpha, 1)$ du sommet α . Notons p_1 le nombre de ses points aériens et k_1 le nombre de ses points terrestres. Le graphe étendu $\widehat{\Gamma}_1 = \Gamma_1 \cup \{e\}$ a donc $2p_1 + 1$ arêtes. Or la contribution dans le calcul total du poids, s'obtient par intégration de la forme $\Omega_{\widehat{\Gamma}_1}$ sur un espace de configurations de dimension $2p_1 + k_1$.

On a donc $k_1 = 1$ et le sommet terrestre est effectivement atteint sinon la dimension de l'espace de configurations serait inférieure à $2p_1 + 1$.

Le graphe Γ_1 possède alors $2p_1$ arêtes dont au plus $p_1 - 1$ vont sur les points aériens de Γ_1 (c'est un arbre) et au moins p_1 autres vont sur α et une arête va sur un sommet terrestre. Comme les arêtes doubles sont interdites, on en déduit que de chacun des p_1 sommets de Γ_1 part une et une seule arête vers le sommet α . Il est alors presque évident que l'arbre Γ_1 est de la forme de la figure [6]. On appellera une telle figure un escargot.

En reprenant les notations introduites plus haut on peut donc énoncer le lemme suivant :

Lemme 2.2. *Soit $\widehat{\Gamma}$ un graphe 0-admissible dont la contribution dans la formule de la formalité tangente est a priori non nulle. Alors le graphe Γ se décompose est un produit de graphes simples comme à la figure [6], appelés escargots.*

2.4 Factorisation des contributions des escargots

Étant donné un 0-graphe admissible quelconque sa forme d'angle

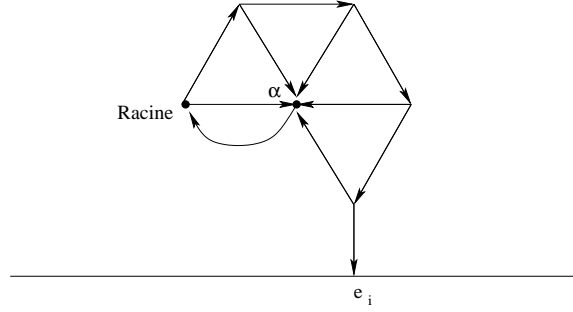


FIG. 6 – Un escargot

associée est donc le produit des formes d'angles des escargots qui le composent. Nous allons voir que l'antisymétrisation évoquée dans le lemme 2.1 permet de factoriser dans le poids les contributions de ces graphes ce qui nous permet d'énoncer le lemme suivant.

Lemme 2.3. *Les contributions dans le poids des produits d'escargots se factorisent grâce à l'opération d'antisymétrisation.*

Raisonnons dans le cas où α est un p -champ de vecteurs. Les graphes qui interviennent sont des produits de p escargots (éventuellement triviaux), noté $\widehat{\Gamma}_1, \dots, \widehat{\Gamma}_p$ comme à la figure [7] où on n'a représenté que deux escargots. Ces graphes sont repérés par la position terrestre correspondante et sont rangés dans l'ordre croissant.

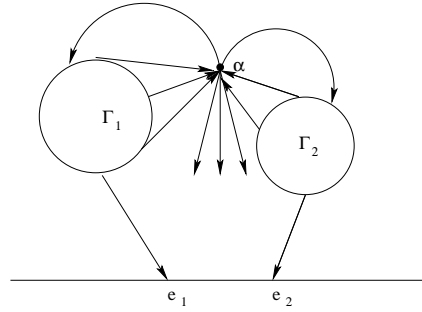


FIG. 7 – Produit de deux escargots

Appliquons l'antisymétrisation qui nous permet d'identifier les éléments de la cohomologie tangentielle de Hochschild avec ceux de la cohomologie des cochaînes sur $U(\mathfrak{g})$ (Lemme 2.1). Nous obtenons des contributions de la forme

$$\sum_{\sigma} \frac{\text{sgn}(\sigma)}{p!} \left(\int \Omega_{\widehat{\Gamma}_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{\widehat{\Gamma}_p} \right) B_{\widehat{\Gamma}_1 \cup \dots \cup \widehat{\Gamma}_p}(\alpha)(e_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes e_{\sigma(p)}).$$

Considérons maintenant les contributions des graphes symétrisés de $\widehat{\Gamma}_1 \cup \dots \cup \widehat{\Gamma}_p$. Par graphe symétrisé on entend le graphe obtenu en permutant les positions terrestres des graphes $\widehat{\Gamma}_i$ comme à la figure [8]. On obtient pour toute permutation τ les contributions de la forme

$$\sum_{\sigma} \frac{\text{sgn}(\sigma)}{p!} \left(\int \Omega_{\widehat{\Gamma}_{\tau(1)}} \wedge \dots \wedge \Omega_{\widehat{\Gamma}_{\tau(p)}} \right) B_{\widehat{\Gamma}_{\tau(1)} \cup \dots \cup \widehat{\Gamma}_{\tau(p)}}(\alpha)(e_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes e_{\sigma(p)}). \quad (2.18)$$

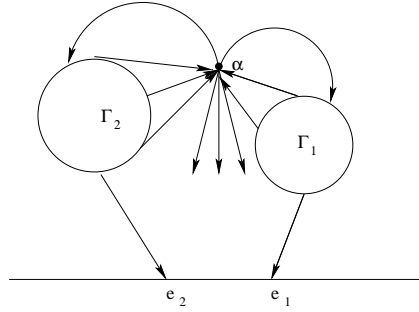


FIG. 8 – L'anti-symétrisé du graphe associé à $\widehat{\Gamma}$

Clairement on a

$$B_{\widehat{\Gamma}_{\tau(1)} \cup \dots \cup \widehat{\Gamma}_{\tau(p)}}(\alpha)(e_{\tau(1)} \otimes \dots \otimes e_{\tau(p)}) = B_{\widehat{\Gamma}_1 \cup \dots \cup \widehat{\Gamma}_p}(\alpha)(e_1 \otimes \dots \otimes e_p). \quad (2.19)$$

Notons x_i la position terrestre correspondant au graphe $\widehat{\Gamma}_i$. La contribution dans le poids de l'escargot $\widehat{\Gamma}_i$ obtenue par intégration sur les positions de première espèce (points aériens) où est placé le 2-vecteur de Poisson est donc une 1-forme en x_i , notée $\psi_{\widehat{\Gamma}_i}(x_i)dx_i$. On a donc :

$$\left(\int \Omega_{\widehat{\Gamma}_{\tau(1)}} \wedge \dots \wedge \Omega_{\widehat{\Gamma}_{\tau(p)}} \right) = \int_{x_1 < \dots < x_p} \psi_{\widehat{\Gamma}_1}(x_1) \dots \psi_{\widehat{\Gamma}_p}(x_p) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p. \quad (2.20)$$

En sommant les différentes contributions (2.18) pour chaque permutation τ on obtient, compte tenu des équations (2.19) et (2.20), pour tout $\widehat{\Gamma}_1, \dots, \widehat{\Gamma}_p$:

$$\sum_{\tau, \sigma} \frac{\text{sgn}(\sigma)}{p!} \left(\int \Omega_{\widehat{\Gamma}_{\tau(1)}} \wedge \dots \wedge \Omega_{\widehat{\Gamma}_{\tau(p)}} \right) \cdot B_{\widehat{\Gamma}_{\tau(1)} \cup \dots \cup \widehat{\Gamma}_{\tau(p)}}(\alpha)(e_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes e_{\sigma(p)}) =$$

$$\sum_{\tau, \sigma} \frac{\text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau)}{p!} \left(\int_{x_{\tau(1)} < \dots < x_{\tau(p)}} \psi_{\widehat{\Gamma_{\tau(1)}}}(x_{\tau(1)}) dx_{\tau(1)} \wedge \dots \wedge \psi_{\widehat{\Gamma_{\tau(p)}}}(x_{\tau(p)}) dx_{\tau(p)} \right) \cdot B_{\widehat{\Gamma_1} \cup \dots \cup \widehat{\Gamma_p}}(\alpha) (e_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes e_{\sigma(p)}). \quad (2.21)$$

Or on a :

$$\sum_{\tau} \text{sgn}(\tau) \left(\int_{x_{\tau(1)} < \dots < x_{\tau(p)}} \psi_{\widehat{\Gamma_{\tau(1)}}}(x_{\tau(1)}) dx_{\tau(1)} \wedge \dots \wedge \psi_{\widehat{\Gamma_{\tau(p)}}}(x_{\tau(p)}) dx_{\tau(p)} \right) = \int_{x_1, \dots, x_p} \psi_{\widehat{\Gamma_1}}(x_1) \dots \psi_{\widehat{\Gamma_p}}(x_p) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p, \quad (2.22)$$

qui est une intégrale à variables séparées. Au final l'expression (2.21) s'écrit

$$\sum_{\sigma} \frac{\text{sgn}(\sigma)}{p!} \left(\prod_i \int_{\mathbb{R}} \psi_{\widehat{\Gamma_i}}(x_i) dx_i \right) B_{\widehat{\Gamma_1} \cup \dots \cup \widehat{\Gamma_p}}(\alpha) (e_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes e_{\sigma(p)}). \quad (2.23)$$

2.5 Calcul du poids d'un escargot

Lemme 2.4. *Le poids associé à un escargot non trivial est nul.*

Soit $\widehat{\Gamma} = \Gamma \sqcup (1, \alpha)$ un escargot (*i.e* un arbre 0-admissible) avec $p + 1$ sommets aériens, c'est à dire que l'arbre Γ a p sommets aériens.

Fixons la position du sommet terrestre en 0 tandis que celle du sommet α est repéré sur le demi-cercle unité par l'angle θ . L'espace de configurations est fibré par la position du sommet α , et chaque fibre est une sous-variété de dimension $2p$. Notons $w_{\Gamma}(\theta)d\theta$ l'intégrale de la forme différentielle $\Omega_{\widehat{\Gamma}}$ sur cette fibre. C'est une 1-forme en la variable θ .

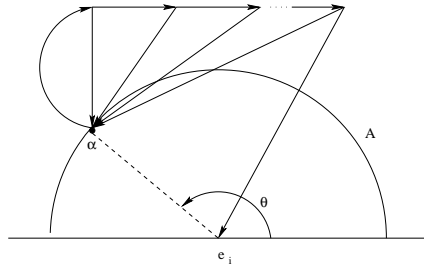


FIG. 9 – Calcul du poids

Le poids de l'escargot $\widehat{\Gamma}$ est donc l'intégrale $w_{\Gamma}(\theta)d\theta$ le long de l'arc de demi-cercle :

$$w_{\widehat{\Gamma}} = \int_0^{\pi} w_{\Gamma}(\theta)d\theta.$$

Or la 1-forme différentielle $w_{\Gamma}(\theta)d\theta$ est la différentielle du poids du graphe déployé $\overset{\vee}{\Gamma}$ (on a déployé l'arête issue du sommet α en ajoutant un sommet). C'est un graphe avec $p+2$ points aériens et $2p+2$ arêtes comme à la figure [10].

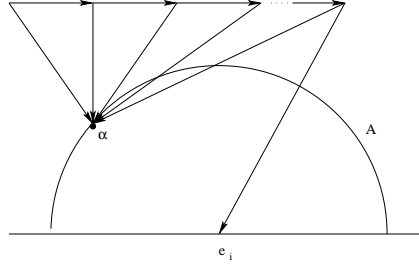


FIG. 10 – Graphe déployé

En effet, considérons la sous-variété des configurations à α fixe. C'est une sous-variété de dimension $2p+2$. On note alors $w_{\overset{\vee}{\Gamma}}(\theta)$ l'intégrale de la $2p+2$ forme $\Omega_{\overset{\vee}{\Gamma}}$ sur cette sous-variété.

Le calcul de la différentielle de $w_{\overset{\vee}{\Gamma}}(\theta)$ se fait par contraction d'arêtes. C'est une conséquence de la formule de Stokes et du lemme 6.6 de [8] (dont on peut se passer dans notre cas, car les graphes sont linéaires). On voit alors facilement que cette différentielle est précisément $\pm w_{\Gamma}(\theta)d\theta$ (voir [13]).

Le graphe $\overset{\vee}{\Gamma}$ est alors un graphe de type Bernoulli (cf [7, 13]) avec $p+2$ sommets aériens. Les coefficients $w_{\overset{\vee}{\Gamma}}(0)$ et $w_{\overset{\vee}{\Gamma}}(\pi)$ correspondent donc au poids des graphes de Bernoulli :

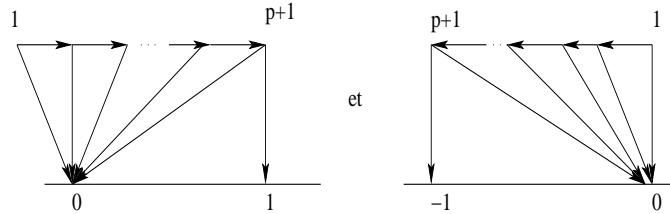


FIG. 11 – Graphes de Bernoulli

qui valent respectivement $\frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!}b_{p+1}(0)$ et $\frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!}b_{p+1}(1)$ où $b_n(x)$ désigne le n -ième polynôme de Bernoulli (cf [7] §4.4.3, [13] §4). Or, d'un côté les polynômes de Bernoulli vérifient l'égalité

$$b_n(1) = (-1)^n b_n(0)$$

et de l'autre on sait que tous les nombres de Bernoulli $B_n = b_n(0)$ sont nuls pour n impair plus grand que 3. Pour $p > 0$ on conclut que l'on a

$$w_{\widehat{\Gamma}} = w_{\vee}(0) - w_{\vee}(\pi) = 0,$$

et pour $p = 0$ on retrouve bien sûr la valeur $1 = \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})$.

2.6 Conclusion

Nous pouvons donc conclure que l'application $\Psi^* \circ d\mathcal{U}^0$ est en fait l'identité, lorsque l'on voit $U(\mathfrak{g})$ comme l'algèbre $(S(\mathfrak{g}), \star)$ via l'application de Duflo (formule (2.16)).

En effet, d'après le lemme 2.4 seuls les escargots triviaux vont intervenir dans la formule (2.23) et le coefficient

$$\prod_i \int_{\mathbb{R}} \psi_{\widehat{\Gamma}_i}(x_i) dx_i$$

vaut alors clairement 1. Pour tout p -champ de vecteurs à coefficients polynomiaux α on obtient donc

$$\begin{aligned} \Psi^*(d\mathcal{U}^0(\alpha))(e_1 \wedge \dots \wedge e_p) &= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \alpha(e_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes e_{\sigma(p)}) \\ &= \alpha(e_1 \wedge \dots \wedge e_p). \end{aligned} \quad (2.24)$$

On peut énoncer le résultat de cette note :

Théorème 2.5. *L'application de Duflo s'étend en un isomorphisme d'algèbres de $H_{\text{Poisson}}(\mathfrak{g}, S(\mathfrak{g}))$ sur $H(\mathfrak{g}, U(\mathfrak{g}))$.*

Références

- [1] M.Andler, A.Dvorsky, S.Sahi, Kontsevich quantization and invariant distributions on Lie groups. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **35**, (2002), no. 3, 371–390.
- [2] D.Arnal, D.Manchon, M.Masmoudi, Choix des signes pour la formalité de M. Kontsevich. *Pacific J. Math.* **203**, (2002), no. 1, 23–66.

- [3] M.Andler, S.Sahi, Ch.Torossian, Convolution of invariant distributions on Lie groups, e-print, math.QA/0104100.
- [4] H.Cartan, S.Eilenberg, Homological algebra, *Princeton University Press, Princeton*, 1956.
- [5] C.Chevalley, S.Eilenberg, Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **63**, (1948), 85–124.
- [6] W.Fulton, R. MacPherson, Compactification of configuration spaces. *Ann. Math.*, **139**, (1994), 183–225.
- [7] V.Kathotia, Kontsevich universal formula for quantization and the Campbell-Baker-Hausdorff formula, *Internat. J. Math.* **11**, (2000), 523–551.
- [8] M.Kontsevich, Deformation quantization of Poisson manifolds I, e-print, QA/9709040.
- [9] J-L.Koszul, Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie. The mathematical heritage of Élie Cartan (Lyon, 1984). *Astérisque* (1985), Numero Hors Serie, 257–271.
- [10] J-L.Loday, *Cyclic Homology*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [11] D.Manchon, Ch.Torossian, Cohomologie tangente et cup-produit pour la quantification de Kontsevich. *Ann. Math. Blaise Pascal* **10**, (2003), no. 1, 75–106.
- [12] T.Mochizuki, On the morphism of Duflo-Kirillov type, *J. Geom. Phys.* **41**, (2002), 73–113.
- [13] Ch.Torossian, Sur la conjecture combinatoire de Kashiwara-Vergne, *J. Lie Theory* **12**, (2002), 597–616.
- [14] B. Shoikhet, On the Duflo formula for L_∞ -algebras and Q -manifolds, e-print, QA/9812009.
- [15] B. Shoikhet, Tsygan formality and Duflo formula, e-print, QA/0012066.
- [16] B. Shoikhet, Vanishing of the Kontsevich integrals of the wheels, *Lett. Math. Phys.* **56** (2001), no. 2, 141–149.
- [17] Ch.A.Weibel, An introduction to homological algebra, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **38**. *Cambridge University Press, Cambridge*, 1994.